

## PENERAPAN KEKANGAN MULTI TITIK DALAM ANALISA STRUKTUR

Zet Mallisa \*

### Abstract

*The paper presents the use of an algorithm to apply constraint to a governing system of simultaneous equations. The method consists of the implementation of the constraints directly on the system of simultaneous governing equations prior to the solution operations. By the application of the method, problematic aspects such as possibility of the enlargement of the coefficient matrix size, or possible "ill-condition" of the matrix, can be avoided. As a by-product, the method can also be used as a tool to compute for support reactions. The method can be applied suitably well in a computer analysis program.*

**Keyword:** constraints application, constraint, multi-point constraints, system of simultaneous equations

### 1. Pendahuluan

Dalam mekanika terapan, analisis struktur mencakup penentuan solusi dari suatu sistem persamaan simultan sebagai bagian dari keseluruhan proses operasi. Dalam analisis struktur dengan metoda kekakuan, dihadapi sistem persamaan keseimbangan:

$$[K] \cdot \{u\} = \{P\} \dots\dots\dots(1)$$

dimana vektor perpindahan  $\{U\}$  perlu dihitung, serta harus memenuhi syarat kekangan:

$$[A] \cdot \{U_c\} = \{B\} \dots\dots\dots(2)$$

dimana  $\{U\}$  mencakup sebagian atau seluruh komponen dari  $\{U\}$ . Jika  $\{U\}$  mencakup derajat kebebasan yang melibatkan lebih dari satu titik simpul maka dihadapi sistem kekangan multi titik (*multi-point constraints*). Sebagai contoh, untuk sistem struktur dalam Gambar 1, keseimbangan struktur dimanifestasikan oleh Pers. (1), yang dalam hal ini menjadi:

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

### 2. Studi Pustaka

Salah satu syarat batas dalam hal ini adalah keharusan syarat komponen perpindahan di arah tegak lurus rol, yaitu:

$$-U_3 \sin \phi + U_4 \cos \phi = 0 \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5)$$

jadi untuk sistem struktur contoh ini, diperoleh:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (6a)$$

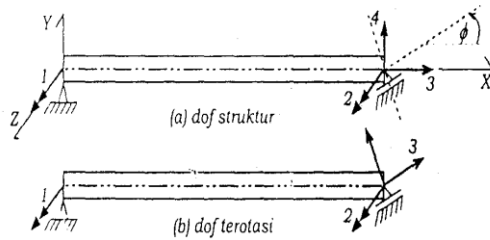
$$\{U_c\} = \{U_3 \quad U_4\} \quad \dots\dots(6b)$$

$$\{B\} = \{0\}$$

Dalam persamaan (6.b), matriks kolom atau vektor dituliskan dalam format  $\{....\}$ , sekalipun dalam hal ini unsur-unsur disusun berbaris ke kanan demi penghematan ruang. Persamaan dalam (4) atau (5) merupakan kekangan (*constraint*) yang harus dipenuhi oleh solusi  $\{U\}$  dan Pers. (3). Tentu saja, suatu pasangan derajat kebebasan yang telah diukurkan di arah bebas seperti dalam Gambar 1.b, dapat digunakan. Masalahnya adalah bahwa setiap matriks kekakuan dan vektor gaya elemen yang menyumbang kepada derajat kebebasan  $U_3$  dan  $U_4$ , harus dirotasikan terlebih dahulu sebelum dilakukan proses perakitan terhadap persamaan global. Langkah rotasi ini memerlukan proses

\* Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Tadulako, Palu

husus atas elemen yang berpartisipasi terhadap derajat kebebasan yang terotasi tersebut.



Gambar 1. Sistem Struktur dengan Perletakan  
(Sumber: Skew-Support)

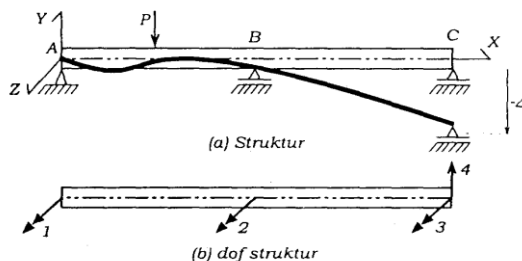
Tinjauan (contoh) lainnya adalah suatu sistem struktur dalam Gambar 2 berupa balok menerus statis tidak tentu, dengan penurunan vertikal perletakan sebesar  $\Delta$  pada tumpuan C. Selain akibat gaya luar, struktur akan menerima gaya reaksi sekunder akibat amblasen tersebut. Derajat kebebasan berupa translasi vertikal tumpuan C harus diaktifkan untuk dapat memperhitungkan pengaruh penurunan vertikal  $\Delta$ , sehingga untuk sistem ini diperoleh matriks kekakuan berukuran  $4 \times 4$  seperti dalam Pers. (3), dengan kekangan.

Algoritma kekangan Multi Titik dalam Analisa Struktur:

$$U_4 = -\Delta \quad \dots\dots\dots(7)$$

Dalam contoh ini diperoleh kekangan sebagai:

$$\begin{aligned} [A] &= \{1\} \\ \{U_c\} &= \{U_4\} \quad \dots\dots\dots(8) \\ \{B\} &= \{-\Delta\} \end{aligned}$$



Gambar 2. Struktur di bawah pengaruh  
amblasan dan beban luar

Tinjauan (contoh) berikutnya adalah suatu portal yang diberikan dalam Gambar 3. Di bawah gaya lateral, struktur semacam ini sering dimodelkan dengan asumsi lantai sebagai diafragma kaku, sedemikian rupa sehingga lendutan lateral setiap tingkat menjadi sama (sementara untuk memudahkan contoh, rotasi denah pada bidang datar, diabaikan).

Untuk kasus seperti ini derajat kebebasan (disingkat, dot) dapat diberi nomor yang sama untuk lendutan horisontal lantai, namun penomoran ini tidaklah standar. Suatu cara lain, seperti dalam Gambar 3.b, dapat dilakukan, yaitu dengan memberikan nilai yang relatif sangat besar bagi kekakuan aksial balok/ lantai dan pendel yang khusus ditambahkan secara ekstra. Namun, cara ini berakibat pada perilaku matriks kekakuan modifikasi yang kurang baik, sebab mencampurkan nilai-nilai unsur kekakuan yang sangat besar dibandingkan dengan lainnya.

### 3. Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah menyelesaikan sistem persamaan dengan melakukan modifikasi matriks kekakuan dan vektor beban.

#### 3.1 Sistem Persamaan Modifikasi Dengan Kekangan

Pertama-tama, perlu diperiksa ukuran dari matriks koefisien  $[A]$ . Jika ukuran matriks koefisien kekangan ini adalah  $(p \times q)$ , maka vektor perpindahan  $\{U_c\}$  dapat dibagi atau dipartisi atas dua bagian, yaitu atas subvektor  $\{U_m\}$  yang berukuran  $(q-p) \times 1$ , dan  $\{U_s\}$  berukuran  $p \times 1$ . Sisa sub-vektor  $\{U_f\}$  adalah bagian yang mencakup komponen yang tidak terkait dalam persamaan kekangan. Dengan demikian, perpindahan  $\{U\}$  dipartisi menjadi:

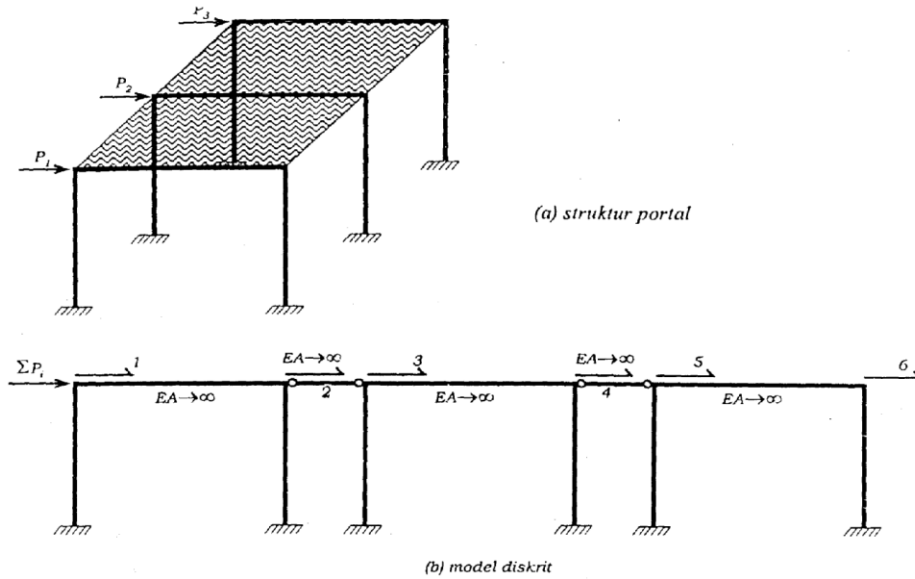
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_f\} \\ \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

yang sekaligus membagi  $\{K\}$  atas partisi yang koresponden. Dengan demikian, Pers. (1) akan ternartisi menjadi:

$$\begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fm}] & [K_{fs}] \\ [K_{mf}] & [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sf}] & [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_f\} \\ \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{P_m\} \\ \{P_s\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

dan Pers. (2) dalam bentuk

$$[A_m] \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \{B\} \quad (11)$$



Gambar 3. Struktur Portal dengan Asumsi Lantai Diafragma Kaku

Sebelum kekangan dalam Pers. (11) diterapkan atas Pers. (10), terlihat bahwa kekangan Pers. (11) identik dengan penerapan vektor kekangan atas bagian partisi bawah Pers. (10), yaitu identik dengan dikerjakannya vektor gaya  $\{R5\}$  sedemikian hingga:

$$[K_{sf}]\{\bar{U}_f\} + [K_{sm}]\{U_m\} + [K_{ss}]\{U_s\} = \{P_f\} + \{R_s\} \quad (12)$$

Berikutnya, vektor perpindahan  $\{U\}$  dalam Pers. (10) diberi tanda yang menyatakan bahwa vektor ini belum termodifikasi oleh kehadiran kekangan, yaitu dengan memberi tanda garis di atasnya, Jadi:

$$\begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fm}] & [K_{fs}] \\ [K_{mf}] & [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sf}] & [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{U}_f\} \\ \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{P_m\} \\ \{P_s\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Berikutnya, vektor  $\{\bar{U}\}$  dikaitkan dengan vektor  $\{U\}$  dengan transformasi:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{U}_f\} \\ \{\bar{U}_m\} \\ \{\bar{U}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [O] & [O] \\ [O] & [I] & [O] \\ [O] & [A_m] & [A_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_f\} \\ \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

dimana baris terbawah Pers. (14) memberikan hubungan sebagai:

$$\{\bar{U}_s\} = [A_m]\{U_m\} + [A_s]\{U_s\} - \{B\} \quad (15)$$

Ini berarti bahwa pemenuhan syarat kekangan Pers. (11), identik dengan penerapan syarat:

$$\{\bar{U}_s\} = \{0\} \quad (16)$$

dalam Pers. (13). Hal ini dapat diperoleh dengan memodifikasi Pers. (13) menjadi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fm}] & [0] \\ [K_{mf}] & [K_{mm}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{ss}] \end{bmatrix}}_{[K_m]} \begin{Bmatrix} \{\bar{U}_f\} \\ \{\bar{U}_m\} \\ \{\bar{U}_s\} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \{P_f\} - [K_{fs}]\{B\} \\ \{P_m\} - [K_{ms}]\{B\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}}_{\{P\}} \quad (17)$$

Selanjutnya dimisalkan suatu medan perpindahan virtual yang setara dengan Pers. (14), yaitu:

$$\begin{Bmatrix} \{\delta \bar{U}_f\} \\ \{\delta \bar{U}_m\} \\ \{\delta \bar{U}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [A_m] & [A_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta U_f\} \\ \{\delta U_m\} \\ \{\delta U_s\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Pemasukan bentuk Pers. (14) dalam Pers. (17), serta pengalihan sistem persamaan hasil dengan bentuk Pers. (18) dan depan, memberikan hasil sebagai berikut:

$$\{\delta U\}^T [R]^T [K_m] [R] \{U\} = \{\delta U\}^T [R]^T \{\{P\} + \{B\}\} \quad (19)$$

Karena  $\{\delta U\}$  bersifat sembarang asalkan secara kinematis dimungkinkan, maka akhirnya diperoleh hasil modifikasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fm}] + [A_m]^T [K_{ss}] [A_m] & [0] \\ [K_{mf}] & [K_{mm}] + [A_m]^T [K_{ss}] [A_m] & [A_m]^T [K_{ss}] [A_s] \\ [0] & [A_s]^T [K_{ss}] [A_m] & [A_s]^T [K_{ss}] [A_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_f\} \\ \{U_m\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_f\} - [K_{fs}] \{B\} \\ \{P_m\} + [A_m]^T [K_{ss}] \{B\} - [K_{ms}] \{B\} \\ [A_s]^T [K_{ss}] \{B\} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Bentuk Pers. (20) merupakan perpaduan dari persamaan keseimbangan (10) dengan syarat kekangan Pers. (11), tanpa merubah ukuran matriks kekakuan. Artinya, pengaruh kekangan dimasukkan ke dalam (built-in) persamaan keseimbangan. Matriks kekakuan termodifikasi dalam Pers. (20) masih tetap simetris, sehingga masih efisien untuk dioperasikan. Perhatikan juga bahwa akibat kekangan, sub-vektor gaya yang berkaitan dengan  $\{U_m\}$ ,  $\{U_s\}$ , dan  $\{U_f\}$ , berubah. Menarik untuk dilihat bahwa baris terbawah persamaan terpartisi dalam pers. (20), yaitu:

$$[A_s]^T [K_{ss}] [A_m] \{U_m\} + [A_s]^T [K_{ss}] [A_s] \{U_s\} = [A_s]^T [K_{ss}] \{B\} \quad (21)$$

pada hakekatnya adalah merupakan bentuk Pers. (11), namun dengan perkalian dari depan sebagai berikut:

$$[A_s]^T [K_{ss}]$$

### 3.2 Penerapan kekangan

Sebelum menyajikan operasi penerapan metoda kekangan yang telah dipaparkan di depan, terlebih dahulu diberikan beberapa aspek yang menyangkut sistem persamaan termodifikasi dalam Pers. (20). Lazimnya, komponen vektor perpindahan yang terpengaruh dan yang tidak terpengaruh kekangan, tidaklah selalu turut

seperti dalam bentuk Pers. (9), namun tersebar atau terselip dalam  $\{U\}$ . Pengurutan kembali dari setiap unsur vektor perpindahan agar sesuai dengan Pers. (9), dapat dilakukan. Namun, operasi seperti ini cukup mahal dan rumit dari segi praktek pemrograman.

Untuk mengatasi hal ini operasi untuk mendapatkan bentuk termodifikasi dalam Pers. (20), dapat dilakukan dengan jalan menerapkan kekangan Pers. (11), baris demi baris secara berurutan. Dengan demikian,  $[A_m]$  dan  $[A_s]$  dalam Pers. (20) menjadi matriks baris untuk satu kali modifikasi. Operasi modifikasi dengan cara satu persatu ini, melibatkan operasi satu baris yang terselip dalam antara keseluruhan baris.

Hal berikutnya yang perlu dicatat adalah bahwa penerapan syarat kekangan akan merubah ukuran *half-bandwidth* dan matriks kekakuan awal, sehingga perlu dipertimbangkan jika disimpan matriks tersebut secara setengah jalur (*half-bandwidth*) ataupun *sky-line*.

Penerapan kekangan sekarang dapat disusun dengan urutan tindakan sebagai berikut:

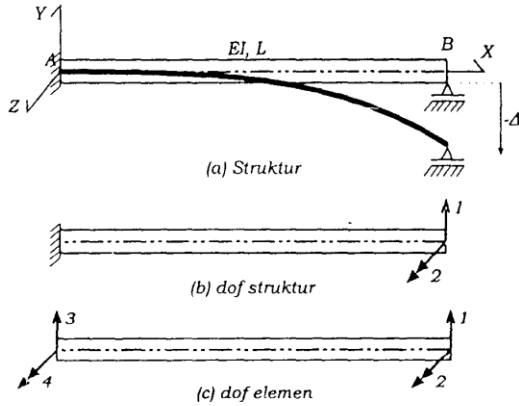
- (1) Rakitkan persamaan global seperti dalam Pers (1).
- (2) Susun syarat kekangan seperti dalam bentuk matriks menurut Pers. (11).
- (3) Berdasarkan Pers. (11), susun persamaan seperti dalam Pers. (12), yang dapat digunakan untuk menghitung reaksi  $\{R_s\}$ . Simpan persamaan tersebut, karena bentuk asli dari  $[K]$  akan dimodifikasi akibat penerapan kekangan.
- (4) Lakukan modifikasi matriks kekakuan dan vektor beban seperti dalam Pers. (20).
- (5) Selesaikan sistem persamaan termodifikasi dalam Pers. (20) tersebut untuk mendapatkan  $\{U\}$  yang memenuhi keseimbangan serta syarat kekangan Pers. (11) secara otomatis.
- (6) Gunakan  $\{U\}$  yang telah diperoleh dari langkah (5) untuk mendapatkan reaksi dalam Pers. (12).
- (7) Hitung reaksi dalam setiap elemen berdasarkan proses *stress recovery* yang baku.

### 3.3 Contoh penerapan

Sebagai contoh penerapan pertama yang sangat sederhana, tinjaulah suatu balok prismatis AB dengan panjang bentangan L dengan ujung rol B dengan perpindahan sebesar  $-\Delta$  seperti dalam Gambar 4a. Sistem struktur dimodelkan dengan satu elemen dengan dof seperti Gambar 4b, dimana dof akhir diberi index menurut urutannya, dan dof

inaktif dengan 0. Persamaan keseimbangan awal adalah :

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$



Gambar 4. Struktur contoh 1

Kekangan adalah:

$$[1]\{U_1\} = \{-\Delta\} \quad (23)$$

Kemudian baris pertama yang berkaitan dengan  $U_1$ , dimodifikasi seperti dalam Pers. (12), lalu dicatat.

$$\frac{12EI}{L^3}U_1 - \frac{6EI}{L^2}U_2 = 0 + R_1 \quad (24)$$

Perhatikan sekarang bahwa  $\{U_m\}$  tidak muncul dalam Pers. (23). Modifikasi sistem persamaan menurut Pers. (20) memberikan:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{12EI\Delta}{L^3} \\ -\frac{6EI\Delta}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Yang jika diselesaikan memberikan:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta}{3} \\ -\frac{3\Delta}{2L} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Reaksi batang menjadi:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta \\ -\frac{3\Delta}{2L} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{3EI\Delta}{L^3} \\ \frac{3EI\Delta}{L^2} \\ -\frac{3EI\Delta}{L^3} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Reaksi di arah  $U_1$  dapat dihitung dengan Pers. (24), dengan  $U_1$  dari Pers. (26). Hasilnya adalah :

$$R_1 = \frac{12EI}{L^3}(-\Delta) - \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{3\Delta}{2L}\right) = -\frac{3EI\Delta}{L^3} \quad (28)$$

Contoh berikutnya adalah struktur balok ABCD menerus dalam Gambar 5. Dengan metoda yang diusulkan, ingin dihitung reaksi momen jepit pada ujung A dan D akibat gaya P di tengah bentang DC.

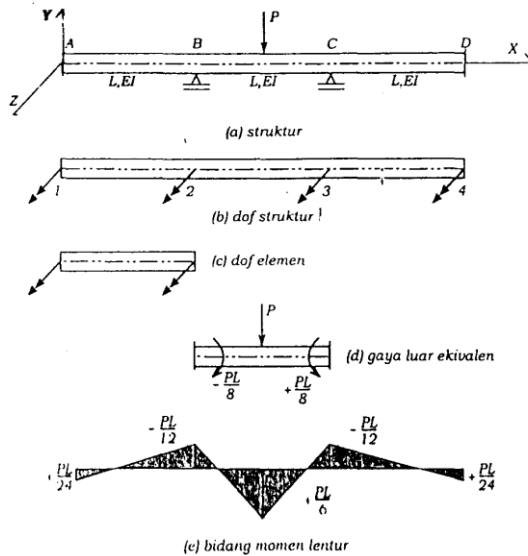
Untuk menjawab ini digunakan model elemen lentur seperti dalam Gambar 5.c. Untuk mendapatkan reaksi momen di A dan D, sementara putaran di A dan di D diaktifkan, sehingga ada 4 dof struktur seperti dalam Gambar 5.b. Persamaan keseimbangan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Dan syarat adalah:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_4 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Selanjutnya, kekangan dalam Pers. (30) merubah baris ke-1 dan ke-4 dari persamaan (29), menurut persamaan (12) sebagai berikut :



Gambar 5. Struktur contoh 2

$$\begin{aligned} \frac{4EI}{L}U_1 + \frac{2EI}{L}U_2 &= R_1 \\ \frac{2EI}{L}U_3 + \frac{4EI}{L}U_4 &= R_4 \end{aligned} \quad (31)$$

Selanjutnya, satu per satu kekangan dalam Pers. (30) diterapkan atas Pers. (29). Pertama, syarat  $U_1 = 0$  membuat Pers. (29) menjadi:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Kedua syarat batas  $U_4 = 0$  merubah persamaan 32 menjadi:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Solusi dari persamaan 33 memberikan

$$\{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4\} = \left\{ 0 \quad -\frac{PL^2}{48EI} \quad +\frac{PL^2}{48EI} \quad 0 \right\} \quad (34)$$

yang secara otomatis memenuhi Pers. (29) dan (30) sekaligus. Reaksi perletakan di A dan D berupa momen ujung sekarang dapat dihitung dengan memasukkan  $U_1$  dari Pers. (34) ke dalam Pers. (31) dengan hasil:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{4EI}{L}(0) + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{PL^2}{48EI}\right) = -\frac{PL}{24} \\ R_2 &= \frac{2EI}{L}\left(\frac{PL^2}{48EI}\right) + \frac{4EI}{L}(0) = +\frac{PL}{24} \end{aligned} \quad (35)$$

Momen ujung elemen BC dapat dihitung dengan rumus standard sebagai berikut.:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{8EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{PL^2}{48EI} \\ +\frac{PL^2}{48EI} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL}{12} \\ -\frac{PL}{12} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Momen ujung kemudian dapat dikonversikan menjadi momen lentur. Bidang momen struktur diperlihatkan dalam Gambar 5.e.

#### 4. Hasil dan Pembahasan

Dibandingkan dengan beberapa metoda yang lazim digunakan, metoda yang diusulkan dalam makalah ini memiliki beberapa keuntungan sebagai berikut:

- 1) Dibandingkan dengan penerapan metoda pengali Lagrange (Gallagher, 1975), matriks kekakuan sebagai matriks koefisien persamaan simultan dalam metoda usulan tidak mengalami pembesaran ukuran. Selain itu, matriks koefisien termodifikasi, tetap memiliki sifat/karakteristik yang "well-behave".
- 2) Derajat kebebasan yang telah dikekang dan diproses, tetap berada di dalam sistem persamaan simultan global, tidak perlu dikeluarkan (dieliminir) sebagaimana halnya dengan metoda yang didasarkan atas operasi antara baris dan kolom seperti dalam Referensi 1.
- 3) Metoda yang diusulkan sangat cocok diterapkan atas formulasi matriks, baik dengan matriks kekakuan yang disusun dengan metoda setengah

jalur, atau secara frontal (Curiskis et al., 1978; Irons, 1970). Ini dimungkinkan demikian, karena derajat kebebasan serta urutannya dalam persamaan global, tetap dan tidak diubah susunannya.

- 4) Dibandingkan dengan hasil yang diusulkan oleh Abel dan Shepperd (1978), dapat diajukan kemungkinan bahwa cara yang diusulkan mereka tersebut masih perlu disempurnakan. Komponen beban yang koresponden dengan derajat kebebasan terkekang, yaitu ( $F_s$ ) yang masih muncul dalam persamaan termodifikasi. Kiranya perlu divalidasi. Hadirnya kekangan di arah derajat kebebasan terkekang, tentunya akan merubah nilai dari komponen beban di arah derajat kebebasan tersebut, seperti tercermin dalam Pers. (12).

## 5. Kesimpulan dan Saran

### 5.1 Kesimpulan

Dari perumusan dan penerapan teknik operasi penerapan kekangan yang diajukan dalam makalah ini, ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- (1) Penerapan kekangan dengan cara yang diusulkan, sangat standar, dan tidak merubah ukuran matriks kekakuan.
- (2) Cara yang diusulkan akan merubah besar *half bandwidth* matriks koefisien.
- (3) Perilaku matriks koefisien termodifikasi tetap baik, serta tidak akan “*ill-condition*” seperti dapat ditemukan dalam beberapa metoda lain.
- (4) Matriks kekakuan tetap bersifat simetris.

### 5.2 Saran

Dalam penerapan, beberapa saran yang kiranya perlu dikemukakan untuk diperhatikan sebagai berikut.

- (1) Pada dasarnya, teknik yang diusulkan juga dapat digunakan secara umum untuk kasus lainnya, yang tergolong pada penentuan solusi sistem persamaan simultan dengan syarat batas, misalnya problem fluida, transfer panas, dan lain-lain.
- (2) Cara di atas dapat diterapkan dalam suatu subroutine komputer, secara mudah dan efisien.
- (3) Khususnya, problem rekayasa dengan syarat batas berubah secara quasi-statis, cara yang diusulkan sangat cocok untuk diterapkan. Sebagai contoh, problem elastisitas dengan syarat batas perpindahan yang berubah nilainya sesuai pembebanan, cara di atas dapat diterapkan dengan mudah.

## 6. Daftar Pustaka

- Abel, J.K., dan Sheppard, M.S., 1978. “ *An Algorithm for Multipoint Constraints in Finite Element Analysis*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, pp. 464-467.
- Curiskis, J.L., dan Valiappan, S., 1978, “ *A Solution Algorithm for Linear Constraint Equations in Finite Element Analysis*”, Computers and Structures, vol. 8, pp. 117-124.
- Gallagher, R.H., 1975, “ *Finite Element Analysis: Fundamentals*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 76-84.
- Irons, B.M., 1970, “ *A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 2, pp. 5-32.